ecricome
www.ecricome.org

Banque d'épreuves communes aux concours des Ecoles
Esc**bordeaux**/euromed**marseille**/icn**nancy**/esc**reims**/esc**rouen**/esc**toulouse**

CONCOURS D'ADMISSION 2005

MATHEMATIQUES
Option Technologique

Lundi 2 mai 2005 de 8h 0 à 12h00
Durée : 4 heures

Candidat bénéficiant d'un « Tiers-temps » : 8h00-13h20

Aucun document n'est autorisé. Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves- de leurs affirmations.

EXERCICE 1

On note φ la fonction numérique d'une variable réelle x définie par :

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x$$

1. Etudier le signe du quotient $\frac{1+x}{1-x}$ suivant les valeurs du réel x.

2. Justifier que l'ensemble de définition de φ est l'intervalle $I =]-1,1[$.

3. Montrer que φ est impaire.

4. Démontrer que pour x dans I,

$$\varphi'(x) = 2\frac{x^2}{1-x^2}$$

5. En déduire le tableau de variation de φ en précisant les limites de φ en 1 et en -1.

6.a. Quel est le signe de $\varphi(x)$ sur l'intervalle I ?

b. Calculer la dérivée seconde de φ sur I.

c. En déduire que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad 0 \leq \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$$

d. Etudier la convexité de φ.

7. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$$

a. On donne $\ln 3 < 1,1$.

Montrer que si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ alors $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{2}$, puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|u_n|$$

Puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 2

On considère les matrices à coefficients réels P et Q définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \frac{1}{4}(I + P)$$

où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

1. Calculer P^2, PQ, QP, en fonction de P.

2. Calculer les produits $(4I - P)Q$ et $Q(4I - P)$. Qu'en concluez-vous pour la matrice Q ?

3. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n et b_n tels que :

$$Q^n = a_n I + b_n P$$

Les suites (a_n) et (b_n) vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + b_n \end{cases}$$

Avec :

$$a_0 = 1 \text{ et } b_0 = 0$$

4. En déduire a_n en fonction de n.

5. Montrer que pour tout entier n non nul :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = b_n$$

6. En déduire que pour tout entier n :

$$b_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

7. Donner alors l'expression, sous forme matricielle, de Q^n en fonction de l'entier n.

8. On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + y_n + z_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + 2y_n + z_n) \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + y_n + 2z_n) \end{cases}$$

Avec :

$$x_0 = 1,\ y_0 = z_0 = 0$$

On pose alors :

$$U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

a. Déterminer U_0, U_1.

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = QU_n$$

c. Puis montrer que, pour tout entier naturel n :

$$U_n = Q^n U_0$$

d. En déduire l'écriture de x_n, y_n, z_n en fonction de n, puis leur limite lorsque n tend vers plus l'infini.

EXERCICE 3

Une entreprise de sondage interroge des consommateurs sur l'utilisation d'un produit commercial A.
La probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi les utilisateurs du produit A s'estime satisfaite de ce produit est $\frac{2}{3}$.
On admet que les réponses des consommateurs sont indépendantes les unes des autres.

1. L'enquête est effectuée auprès d'un échantillon de 20 consommateurs du produit A. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes satisfaites du produit A.

a. Définir la loi de X. Donner l'espérance mathématique et la variance de X.

b. Déterminer la probabilité qu'aucun consommateur ne soit satisfait du produit A.

2. On interroge une succession de consommateurs du produit A. Le rang du premier consommateur satisfait de ce produit définit une variable aléatoire Y.

a. Pour tout entier naturel k non nul, déterminer la probabilité de l'événement $(Y = k)$.

b. Donner sous forme de fraction irréductible les probabilités suivantes :

i. $p(Y < 3)$

ii. $p(Y < 4 / Y > 2)$

c. Déterminer le nombre entier minimum k_0 tel que la probabilité de l'événement $(Y > k_0)$ soit strictement inférieure à $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$.

3. Le temps, exprimé en minutes, consacré à interroger chaque consommateur est représenté par une variable aléatoire T dont une densité de probabilité f est donnée par :

$$\begin{cases} f(t) = te^{-t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ f(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour $x \geq 0$, l'intégrale

$$\int_0^x te^{-t}dt$$

b. En déduire que f est bien une densité de probabilité.

c. Déterminer la fonction de répartition F_T de T.

d. Montrer que, pour tout entier naturel n, la fonction H_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad H_n(x) = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

est la primitive, qui s'annule en 0, de la fonction h_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

e. En choisissant des valeurs convenables pour n dans la question qui précède, montrer que les espérances $E(T)$ et $E(T^2)$ existent et les calculer. En déduire la variance de T.